# Funzioni differenziabili a valori reali

## Definizione e prime proprietà

**Definizione 1** (Funzione differenziabile). *Siano $\Omega$ un insieme aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che $F$ è differenziabile nel punto $x \in \Omega$, se esiste una funzione lineare*

$$\alpha \cdot x = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i x_i \quad \text{per ogni} \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

*tale che*

$$F(x+h) = F(x) + \alpha \cdot h + o(|h|). \tag{$*$}$$

*Inoltre, se $F$ è differenziabile in $x$, allora $F$ è anche derivabile in $x$ e si ha che $\nabla F(x) = \alpha$. In particolare, possiamo riscrivere $(*)$ come*

$$F(x+h) = F(x) + \sum_{i=1}^{d} h_i\, \partial_i F(x) + o(|h|).$$

**Proposizione 2** (Differenziabile $\Rightarrow$ continua). *Siano $\Omega$ un insieme aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione. Se $F$ è differenziabile nel punto $X_0 \in \Omega$, allora $F$ è continua in $X_0$.*

**Proposizione 3** (Somma e prodotto di funzioni differenziabili). *Siano $\Omega$ un insieme aperto di $\mathbb{R}^d$ e siano $F : \Omega \to \mathbb{R}$ e $G : \Omega \to \mathbb{R}$ due funzioni differenziabili nel punto $x \in \Omega$. Allora:*

(a) *la somma $F + G$ è differenziabile in $x$ e*

$$\nabla(F+G) = \nabla F + \nabla G.$$

(b) *il prodotto $F + G$ è differenziabile in $x$ e*

$$\nabla(FG) = G\nabla F + F\nabla G.$$

---

## Teorema del differenziale

**Teorema 4** (Teorema del differenziale). *Siano $\Omega$ un insieme aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $\Omega$. Se (tutte) le derivate parziali*

$$\partial_i F : \Omega \to \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, d,$$

*sono continue nel punto $x$, allora $F$ è differenziabile in $x$.*

**Dimostrazione:** Dimostreremo il teorema in dimensione due ($d = 2$). Siano $x = x_1$ e $y = x_2$ le coordinate in $\mathbb{R}^2$. Per il teorema di Rolle, dato $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, esistono $h' \in (0,h)$ e $k' = (0,k)$ tali che

$$\begin{aligned} F(x+h, y+k) - F(x,y) &= \Big(F(x+h, y+k) - F(x+h, y)\Big) + \Big(F(x+h, y) - F(x,y)\Big) \\ &= k\, \partial_y F(x+h, y+k') + h\, \partial_x F(x+h', y). \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$
\begin{aligned}
F(x+h,y+k)-&F(x,y) - h\,\partial_x F(x,y) + k\,\partial_y F(x,y)\\
&= k\Big(\partial_y F(x+h,y+k') - \partial_y F(x,y)\Big) + h\Big(\partial_x F(x+h',y) - \partial_x F(x,y)\Big).
\end{aligned}
$$

Usando la continuità di $\partial_x F$ e $\partial_y F$, abbiamo che

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \Big(\partial_y F(x+h,y+k') - \partial_y F(x,y)\Big) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \Big(\partial_x F(x+h',y) - \partial_x F(x,y)\Big) = 0.$$

Si ha quindi che

$$k\Big(\partial_y F(x+h,y+k') - \partial_y F(x,y)\Big) + h\Big(\partial_x F(x+h',y) - \partial_x F(x,y)\Big) = o\Big(\sqrt{h^2+k^2}\Big),$$

il che conclude la dimostrazione. □

---

## Composizione di funzioni differenziabili

**Teorema 5.** *Siano $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ una funzione differenziabile nel punto $t_0 \in \mathbb{R}$ e $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in $\gamma(t_0)$. Allora la funzione composta $F \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è differenziabile in $t_0$ e*

$$(F \circ \gamma)'(t_0) = \gamma'(t_0) \cdot \nabla F\big(\gamma(t_0)\big).$$

*Dimostrazione:* Supponiamo per semplicità che $d = 2$ e scriviamo

$$\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big) \quad \text{e} \qquad \gamma(0) = \big(x_0, y_0\big).$$

Siccome, per ipotesi, $F$ è differenziabile in $(x_0, y_0)$ abbiamo che la funzione

$$\varepsilon(H,K) := F(x_0+H, y_0+K) - \Big[F(x_0,y_0) + H\,\partial_x u(x_0,y_0) + K\,\partial_y F(x_0,y_0)\Big]$$

è $o\big(\sqrt{H^2+K^2}\big)$, ovvero

$$\lim_{(H,K)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(H,K)}{\sqrt{H^2+K^2}} = 0.$$

Ora, usando questa identità, calcoliamo

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{h}\Big[F\big(x(t_0+h), y(t_0+h)\big) - F\big(x(t_0), y(t_0)\big)\Big]&\\
= \frac{1}{h}\Big[F\Big(\big(x(t_0+h)-x_0\big)+x_0\,,\ \big(y(t_0+h)-y_0\big)+y_0\Big) - F\big(x_0,y_0\big)\Big]&\\
= \frac{1}{h}\big(x(t_0+h)-x(t_0)\big)\,\partial_x F(x_0,y_0)&\\
+ \frac{1}{h}\big(y(t_0+h)-y(t_0)\big)\,\partial_y F(x_0,y_0)&\\
+ \frac{1}{h}\varepsilon\Big(x(t_0+h)-x(t_0)\,,\ y(t_0+h)-y(t_0)\Big).&
\end{aligned}
$$

Siccome $x$ e $y$ sono differenzibili in $t_0$, abbiamo che

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(x(t_0+h)-x(t_0)\big)\,\partial_x F(x_0,y_0) = x'(t_0)\,\partial_x F(x_0,y_0)\,,$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(y(t_0+h)-y(t_0)\big)\,\partial_y F(x_0,y_0) = y'(t_0)\,\partial_y F(x_0,y_0)\,.$$

Quindi, per concludere la dimostrazione, dobbiamo solo mostrare che

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\varepsilon\Big(x(t_0+h)-x(t_0)\,,\, y(t_0+h)-y(t_0)\Big) = 0.$$

Prima, osserviamo che

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\,\varepsilon\Big(x(t_0+h)-x(t_0)\,,\,y(t_0+h)-y(t_0)\Big)$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\sqrt{\big(x(t_0+h)-x(t_0)\big)^2+\big(y(t_0+h)-y(t_0)\big)^2}\;\frac{\varepsilon\Big(x(t_0+h)-x(t_0)\,,\,y(t_0+h)-y(t_0)\Big)}{\sqrt{\big(x(t_0+h)-x(t_0)\big)^2+\big(y(t_0+h)-y(t_0)\big)^2}}.$$

La differenziabilità di $x$ e di $y$ implica che

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\sqrt{\big(x(t_0+h)-x(t_0)\big)^2+\big(y(t_0+h)-y(t_0)\big)^2}=\sqrt{\big(x'(t_0)\big)^2+\big(y'(t_0)\big)^2}$$

Ora, siccome le funzioni $x$ e $y$ sono anche continue, abbiamo che

$$\lim_{h\to 0}\Big(x(t_0+h)-x(t_0)\Big)=0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{h\to 0}\Big(y(t_0+h)-y(t_0)\Big)=0.$$

Di conseguenza,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varepsilon\Big(x(t_0+h)-x(t_0)\,,\,y(t_0+h)-y(t_0)\Big)}{\sqrt{\big(x(t_0+h)-x(t_0)\big)^2+\big(y(t_0+h)-y(t_0)\big)^2}}=0,$$

Mettendo insieme le stime precedenti otteniamo

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\varepsilon\Big(x(t_0+h)-x(t_0)\,,\,y(t_0+h)-y(t_0)\Big)=0. \qquad \square$$

---

## Derivate direzionali

Come conseguenza del teorema precedente abbiamo che se

- $\Omega$ è un aperto di $\mathbb{R}^d$;
- $x_0\in\Omega$;
- $F:\Omega\to\mathbb{R}$ è una funzione differenziabile in $x_0$,

allora, per ogni vettore non-nullo $\nu\in\mathbb{R}^d$, la funzione

$$t\mapsto F(x_0+t\nu)$$

è derivabile in $t=0$. La sua derivate in zero si indica con

$$\partial_\nu F(x_0):=\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}F(x_0+t\nu).$$

e prende il nome di *derivata direzionale* (di $F$ in $x_0$ nella direzione $\nu$). Per il teorema della derivata di una funzione composta, abbiamo che

$$\nabla_\nu F(x_0)=\nu\cdot\nabla F(x_0).$$

Esistono tuttavia funzioni che ammettono derivate in ogni direzione (in un determinato punto), ma che non sono differenziabili. Nel primo esercizio mostriamo un esempio in cui l'esistenza delle derivate direzionali non garantisce nemmeno la continuità della funzione. Nell'esercizio successivo, invece, si considera una funzione che ammette derivate direzionali in ogni direzione ed è continua, ma comunque rimane non-differenziabile in zero.

**Esercizio 6.** *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

(i) *Mostrare che per ogni vettore* $\nu = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ *la funzione (di una variabile)*

$$t \mapsto F(t\nu)$$

*è derivabile in* $t = 0$ *e si ha*

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(t\nu) = \begin{cases} \frac{b^2}{a} & se \quad a \neq 0, \\ 0 \quad se \quad a \neq 0 \end{cases} .$$

(ii) *Mostrare che la funzione* $F$ *non è continua in* $(0,0)$.

**Esercizio 7.** *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^4} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

(i) *Mostrare che per ogni vettore* $\nu \in \mathbb{R}^2$ *la funzione (di una variabile)*

$$t \mapsto F(t\nu)$$

*è derivabile in* $t = 0$ *e si ha*

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(t\nu) = 0.$$

(ii) *Mostrare che la funzione* $F$ *è continua in* $(0,0)$.

(iii) *Mostrare che la funzione* $F$ *non è differenzibile in* $(0,0)$.

## Esercizi

**Esercizio 8.** *Siano*
$$\gamma(t) = \Big(t + \cos t \sin(t^2)\,,\ t^2 + e^t - 1\Big),$$
*e*
$$F(x,y) = \cos x \sin y + \sin(xy^2).$$
*Calcolare*
$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)).$$

**Esercizio 9.** *Siano*
$$\gamma(t) = \Big(t + (\ln t)^2, t^3\Big),$$
*e*
$$F(x,y) = \ln\big(xy + \sin(x-y)\big).$$
*Calcolare*
$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=1} F(\gamma(t)).$$

**Esercizio 10.** *Siano*
$$\gamma(t) = \Big(\ \cos(t+t^2)\,,\ \sin\big(t^2\big)\ \Big),$$
*e*
$$F(x,y) = x^2 e^y.$$
*Calcolare*
$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)).$$

**Esercizio 11.** *Siano*
$$\gamma(t) = \Big(\ \cos(t^2)\,,\ \sin\big(t+t^2\big)\ \Big),$$
*e*
$$F(x,y) = ye^x.$$
*Calcolare*
$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)).$$

**Esercizio 12.** *Siano*
$$\gamma(t) = \Big(t + t^2\,,\ t + \sin^3 t\Big),$$
*e*
$$F(x,y) = x\cos(3y) + y\cos(2x).$$
*Calcolare*
$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)).$$

**Esercizio 13.** *Siano*
$$\gamma(t) = \Big(e^t - \cos t\,,\ \sin(t+t^2)\Big),$$
*e*
$$F(x,y) = x + \sin(2y) + \sin(xy) + \sin(x^3y^3) + \sin(x^5y^5).$$
*Calcolare*
$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)).$$

**Esercizio 14.** *Siano*
$$\gamma(t) = \Big(t\cos t\,,\ \cos t\Big),$$
*e*
$$F(x,y) = \ln y + x\sin(xy)\ln y.$$
*Calcolare*
$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)).$$